

Title	円, 球ノ幾何ニツイテ
Author(s)	松村, 宗治
Citation	全国紙上数学談話会. 152 p.48-p.52
Issue Date	1938-02-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74601
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

675. 円, 球ノ幾何ニツイテ

松 村 泉 治(台北大)

普通非ユークリッド幾何ノ研究ニ用ヒラル、方法ヲ吾々ノ場合ニ適用シヨウト思フ。次ニコノ幾何ニツイテノ小注意ヲツケ加ヘル。

§ 1

三次元空間ニ於ケル球ガ *homogene Punktkoordinaten* x_k ($k=1, 2, 3, 4$) テ與ヘラレ其ノ方程式ヲ、普通ノマウニ

$$(1) \quad (x_0)^2 = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

トシ、コレヲ

$$(2) \quad (x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) - (x_0 + x_2)(x_0 - x_2) = 0$$

トシ

$$(3) \quad \frac{x_1 + ix_3}{x_0 - x_2} = \frac{x_0 + x_2}{x_1 - ix_3} = \lambda$$

$$(4) \quad \frac{x_1 - ix_3}{x_0 - x_2} = \frac{x_0 + x_2}{x_1 + ix_3} = \mu$$

トオケ、コゝ = λ, μ ハ Parameter, $i = \sqrt{-1}$ ナル、
此ノトキ (3) ヨリ

$$(5) -\lambda x_0 + x_1 + \lambda x_2 + i x_3 = 0,$$

$$x_0 - \lambda x_1 + x_2 + i \lambda x_3 = 0$$

トナリ、 $\bar{\lambda}$ ナ λ ノ代リ = i ナ $-i$ トナリカヘテ

$$(6) -\bar{\lambda} x_0 - x_1 + \bar{\lambda} x_2 - i x_3 = 0$$

トナリ、此等ノ式カラ例ノヨリ =

$$(7) \begin{cases} \rho x_0 = i (\lambda \bar{\lambda} + 1), \\ \rho x_1 = i (\lambda + \bar{\lambda}), \\ \rho x_2 = i (\lambda \bar{\lambda} - 1), \\ \rho x_3 = (\lambda - \bar{\lambda}) \end{cases}$$

ヲ得。

§ 2

今吾々ハ

$$(1) f \equiv (\alpha u)^2 - (\alpha \alpha)(u u) \cos^2 \theta = 0$$

ヲ考ヘル、コゝ = α ハ R_2 = オケル定円, θ ハ定角, R_2 =
オケル u ハ変円ナル。

サテ西内博士著 (岩波講座) 非ユークリッド幾何ヲ参照
シテ γ ヲ u ノ包絡線上ノ点トセバ

$$(2) \begin{cases} (\alpha \gamma) = (\alpha \alpha)(\alpha u) \sin^2 \theta, \\ (\gamma \gamma) = (\alpha \alpha)(\alpha u)^2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

ガ成立ス

$$(3) (\alpha \gamma)^2 - (\alpha \alpha)(\gamma \gamma) \sin^2 \theta = 0$$

トナル、サテ α, θ ; ϕ, ϕ ハ與ヘラレタリトシ (3) ノ形
ノモノヲニツ考ヘ

$$(4) \quad f \equiv (\alpha \gamma)^2 - (\alpha \alpha)(\gamma \gamma) \sin^2 \theta = 0,$$

$$(5) \quad g \equiv (\phi \gamma)^2 - (\phi \phi)(\gamma \gamma) \sin^2 \phi = 0$$

トシ

$$(6) \quad \lambda f + \mu g = 0$$

ヲ考ヘル、コノ λ, μ ハ Parameter ナアル、コノ
時

$$(7) \quad \lambda : \mu = (\phi \phi) \sin^2 \phi : -(\alpha \alpha) \sin^2 \theta$$

トエラベバ (6) ヨリ

$$(8) \quad \begin{cases} \sqrt{(\phi \phi)} (\alpha \gamma) \sin \phi - \sqrt{(\alpha \alpha)} (\phi \gamma) \sin \theta = 0, \\ \sqrt{(\phi \phi)} (\alpha \gamma) \sin \phi + \sqrt{(\alpha \alpha)} (\phi \gamma) \sin \theta = 0 \end{cases}$$

ヲ得。 (8) ハ

$$(9) \quad \begin{aligned} (\alpha \gamma) &= 0 \\ (\phi \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

ニヨリテ満足サレル。ツマリ α, ϕ ナルニ定円ニ垂直ナル
円ニ向ッテ (8) ハ満足サレル。

尚 (8) ノ形ノ式三個ヲ考ヘテ非仰ラリット幾何ニ於ケ
ルマデニ論セラレル。

以上円ニツイテノベシカ R_3 内ノ球ニツイテモ同様デア
ル。

§ 3

R_2 内ニ二円 γ, γ ガアツテ其ノ交点ヲ A, B トセバ

λ, μ 7 Parameter トシテ $\lambda z + \mu \bar{z}$ ハ z, \bar{z} 1 交点ヲ通ル円系ヲ表ハス, サテ

$$\begin{aligned} (z, \lambda z + \mu \bar{z}, \lambda_0, \mu_0)^2 &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda + \mu \cos \phi & 0 & 0 \\ \lambda + \mu \cos \phi & \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -a^4 \mu^2 \sin^2 \phi \end{aligned}$$

ナルコトガ余ル、コゝ $= a$ ハ λ_0 ト μ_0 トノ間ノ距離デアル、
マタ ϕ ハ z ト \bar{z} トノ間ノ角ヲ表ハス、

ツマリ

$$(1) \quad |(z, \lambda z + \mu \bar{z}, \lambda_0, \mu_0)^2| = a^4 \mu^2 \sin^2 \phi$$

サテ Blaschke: 微分幾何 III, S. 72 = ヨレバ

$$(2) \quad \sin \tilde{\phi} = \frac{|z, \bar{z}, \lambda_0, \mu_0|}{(\lambda_0, \mu_0)}$$

ガ余ツテイル、コゝ $= \tilde{\phi}$ ハ z ト \bar{z} トノ間ノ角デアル。

以上(1), (2) ヲ比較シテ ϕ ト $\tilde{\phi}$ ノ間ノ關係ヲ求メルコトガ出来る。

次ニ

$$\tilde{z} = \frac{z + i \bar{z}}{(\lambda_0 \mu_0)}$$

ハ z ト \bar{z} ガ直交スレバ常ニ点ヲアラハス、

トセテラバ

$$\tilde{z}^2 = 0$$

デアルカラデアル。

(1) ト全様ニシテ λ_i, μ_i 7 Parameter トシテ

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (\lambda_1 \varphi + \mu_1 \psi, \lambda_2 \varphi + \mu_2 \psi, \mu_1 \mu_2)^2 \\
 & = -a^4 \{(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1 \mu_1 \cos \phi\} \{(\lambda_2^2 + \mu_2^2) \\
 & \quad + 2\lambda_2 \mu_2 \cos \phi\} \\
 & + a^4 \{(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) + (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2) \cos \phi\} \\
 & \quad \times \{(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \cos \phi\}
 \end{aligned}$$

ノ成立ガハル。

次ニ

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & (\{\varphi - \mu\} + i\{\psi - \mu\})^2 \\
 & = 2i\{\cos \phi + a^2\}
 \end{aligned}$$

ガハルカラ

$$(5) \quad \cos \phi = \frac{1}{2i} - a^2$$

ナルトキ $\{\varphi - \mu\} + i\{\psi - \mu\}$ ハ 四ツアツハスコトニナル。

次ニ $\varphi + i\psi$ ト $\varphi + i\psi$ トノ間ノ角ヲ Φ トセバ

$$(6) \quad \cos \Phi = 2i$$

ガハル。